

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KÌ 1

Năm học 2025-2026

MÔN: TOÁN LỚP 12

A. Lý thuyết

BÀI 1. ĐƠN ĐIỀU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số



Định nghĩa:

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

Hàm số $y = f(x)$

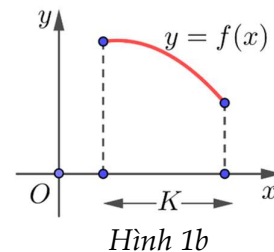
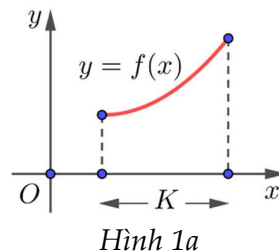
- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Gọi là *nghịch biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.



Chú ý

» Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (Hình 1a).

» Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải (Hình 1b).



2. Tính đơn điệu của hàm số



Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .



Chú ý

» Định lý vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trong K .

» Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K .

3. Khái niệm cực trị của hàm số



Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

Chú ý

- » Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.
- » Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số.
- » Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (cực trị)** của hàm số.

4. Cách tìm cực trị của hàm số



Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

» Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
$f'(x)$		–	+
$f(x)$			

$\swarrow$ $f(x_0)$ $\searrow$
 Cực tiểu

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	–
$f(x)$			

$\swarrow$ $f(x_0)$ $\searrow$
 Cực đại

Chú ý

» Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

- (1) Tìm tập xác định của hàm số.
- (2) Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không tồn tại.
- (3) Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

» Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**1. Định nghĩa****Định nghĩa:**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M = \max_{x \in D} f(x) \text{ hoặc } M = \max_D f(x).$$

- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq m; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } m = \min_{x \in D} f(x) \text{ hoặc } m = \min_D f(x).$$

**Chú ý**

- » Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không xét “trên tập D ”) thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y = f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- » Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn**Cách tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn.**

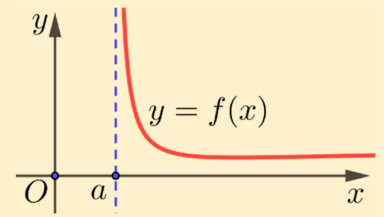
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$:

- Bước 1:** Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- Bước 2:** Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.
- Bước 3:** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2. Khi đó $M = \max_{[a; b]} f(x)$ và $m = \min_{[a; b]} f(x)$.

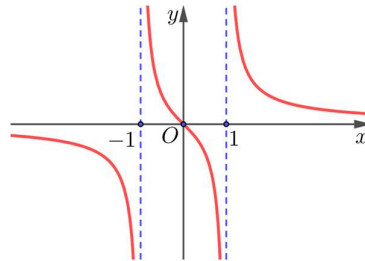
Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**1. Tiệm cận đứng****Định nghĩa:**

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

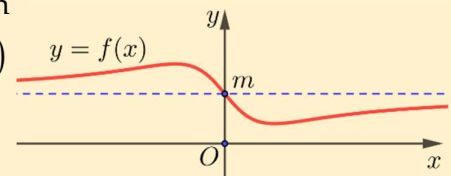
**Chú ý**

» Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$

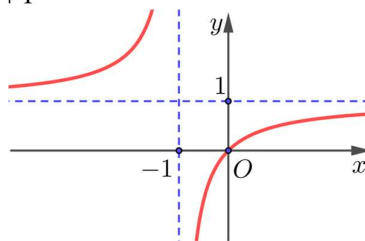
**2. Tiệm cận ngang****Định nghĩa:**

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$
- hoặc
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$

**Chú ý**

» Đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = -1$



3. Tiệm cận xiên

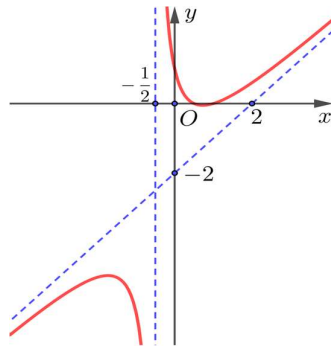
**Định nghĩa:**

Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{hoặc} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Chú ý

» Đồ thị hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{3}{2x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$ và tiệm cận xiên $y = x - 2$



Bài 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

**Định nghĩa:**

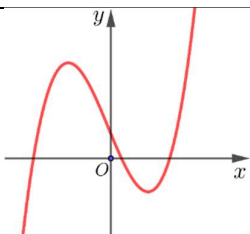
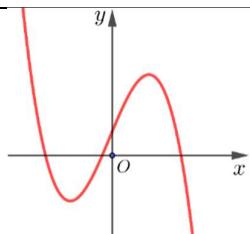
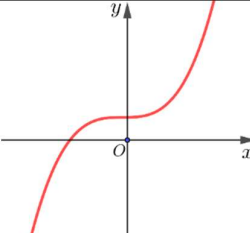
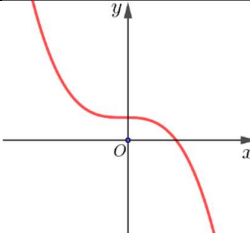
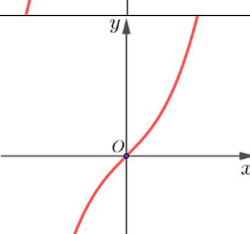
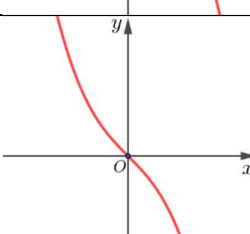
- ①. Tìm tập xác định của hàm số.
- ②. Xét sự biến thiên của hàm số:
 - » Tìm y' , xét dấu y' , xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
 - » Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - » Lập bảng biến thiên của hàm số.
- ③. Vẽ đồ thị của hàm số:
 - » Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...
 - » Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - » Vẽ đồ thị hàm số.

**Chú ý**

» Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số

✓ Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

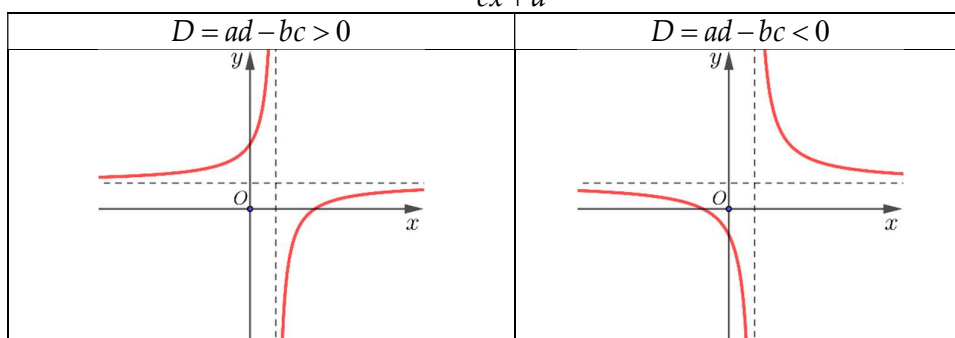
Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ($b^2 - 3ac > 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép ($b^2 - 3ac = 0$)		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm ($b^2 - 3ac < 0$)		



Chú ý

- » Trường hợp: $y' = 0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 đoạn hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên)

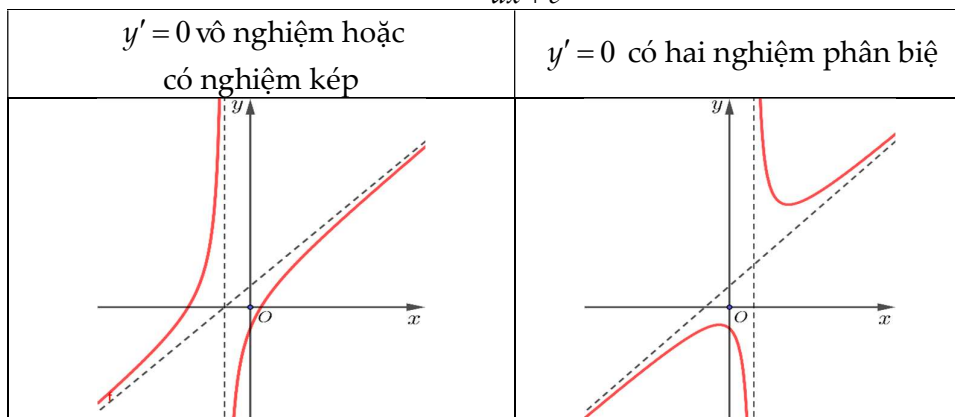
✓ Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)



Chú ý

- » ĐTHS có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- » Các điểm đặc biệt: Giao điểm với Ox : $A\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$, Giao điểm với Oy : $B\left(0; \frac{b}{d}\right)$.
- Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng.

✓ Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} (a \neq 0)$



Chú ý

- » Ta luôn tách được $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{a}{d}x + f + \frac{m}{dx + e}$.
- » Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{e}{d}$, Tiệm cận xiên $y = \frac{a}{d}x + f$.



Chú ý

- » Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- » Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:
 - (a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
 - (b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.
- » Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} (a \neq 0, m \neq 0)$:
 - (a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
 - (b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Chú ý: Bài toán thực tế liên môn đưa về khảo sát hàm số



Phương

- » **Bước 1:** Xác định yếu tố chọn làm ẩn, chỉ ra điều kiện (nếu có)
- » **Bước 2:** Xây dựng phương trình hàm số từ các dữ kiện của bài toán.
- » **Bước 3:** Giải bài toán liên quan đến hàm số và kết luận.

Bài 5. VECTO & CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN**1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ - không.****Định nghĩa:**

» **Vectơ trong không gian** là một đoạn thẳng có hướng.

» **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

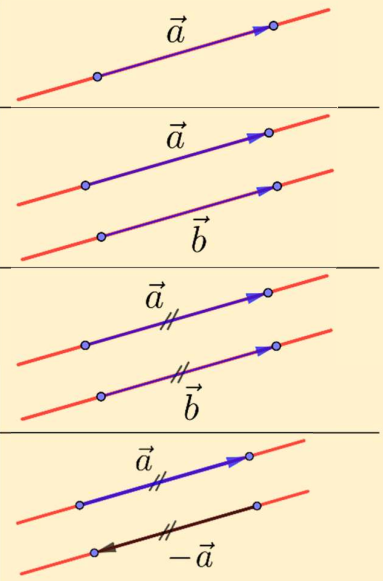
» **Giá** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

» Hai vectơ **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

» Hai vectơ **bằng nhau** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.

» Hai vectơ **đối nhau** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.

» **Vectơ - không** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

**Chú ý**

- » Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B .
- » Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

2. Tổng và hiệu của hai vectơ**Định nghĩa tổng hai vectơ:**

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

▪ Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}, \vec{b}$.

▪ Ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

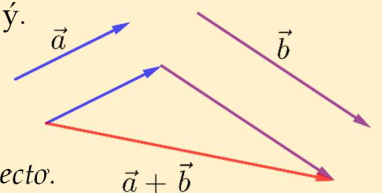
▪ Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ**.

✎ **Nhận xét:** Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

» Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

» Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

» Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$.



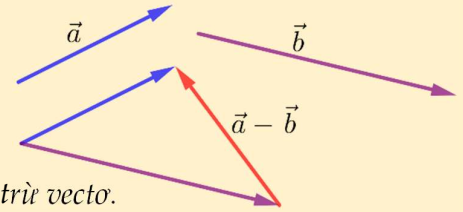
**Chú ý**

» Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

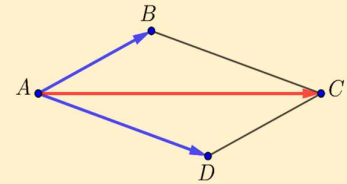
**Định nghĩa hiệu hai vectơ:**

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

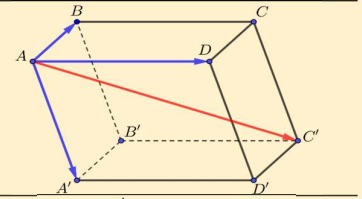
- Hiệu của hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$.
- Ký hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

**Các quy tắc****✓ Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:**

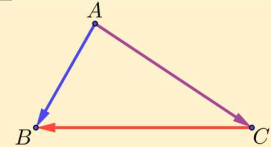
- » Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).
- » Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).

**✓ Quy tắc hình hộp:**

- » Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.

**✓ Quy tắc hiệu:**

- » Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

**3. Tích của một số với một vectơ****Định nghĩa:**

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ.
- Ký hiệu là $k\vec{a}$.
- Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.
 - » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
 - » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$
 - » Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ



Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

- Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số
- Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$



Chú ý

- » Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- » $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0, \vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- » Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.
- » Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Bài 6. TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

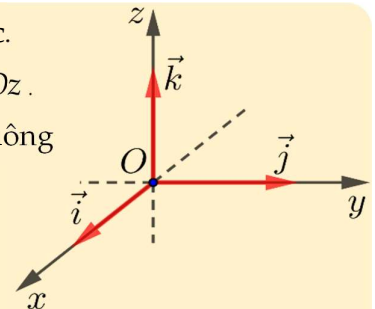
1. Hệ tọa độ trong không gian.



Định nghĩa:

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc.

- » Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .
- » Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông



2. Tọa độ của điểm và vector.



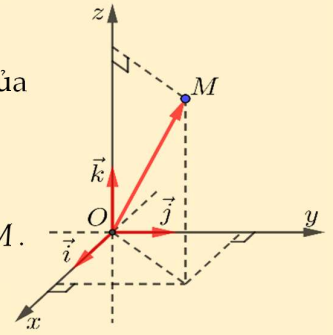
Tọa độ điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M .

» Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$.

» Viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$;

Trong đó x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M .



Tọa độ vector

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$.

» Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$.

» Viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Trong đó a_1 là hoành độ, a_2 là tung độ, a_3 là cao độ của vector $\vec{a}$.



Chú ý:

(1) M thuộc các trục tọa độ:.....

$$M \in Ox \rightarrow M(x; 0; 0)$$

$$M \in Oy \rightarrow M(0; y; 0)$$

$$M \in Oz \rightarrow M(0; 0; z)$$

(2) M thuộc các mặt phẳng tọa độ:.....

$$M \in (Oxy) \rightarrow M(x; y; 0)$$

$$M \in (Oxz) \rightarrow M(x; 0; z)$$

$$M \in (Oyz) \rightarrow M(0; y; z)$$

Bài 7. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vector và tích của một số với một vector



Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

*** **Nhận xét:** Hai vector $\vec{a}; \vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$

**Chú ý**

» Từ nay, các bài tập liên quan đến tọa độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**Định nghĩa:**

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

3. Vận dụng**Tọa độ vectơ biết điểm đầu cuối:**

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$.

Ta có: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

**Tọa độ trung điểm đoạn thẳng**

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$.

Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

**Tọa độ trọng tâm tam giác**

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.

Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

Bài 8. KHOẢNG BIẾN THIÊN – KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MSLGN**1. Khoảng biến thiên.****Định nghĩa:**

Khoảng biến thiên, kí hiệu R , của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

**Ý nghĩa**

» Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

» Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn **lớn hơn** hoặc **bằng** khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
- Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu.
- Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

2. Khoảng tứ phân vị**Định nghĩa:**

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 1, kí hiệu Δ_Q , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

**Ý nghĩa**

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.
Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

**Ý nghĩa**

- Tứ phân vị thứ i , kí hiệu là Q_i với $i = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm được xác

định như sau: $Q_i = u_m + \frac{\frac{in}{4} - C}{n_m} (u_{m+1} - u_m)$.

Trong đó:

- » $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.
- » $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
- » n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
- » $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$

Bài 9. PHƯƠNG SAI & ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MSLGN**Phương sai:**

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2 , được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n} \left[n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2 \right]$$

Trong đó: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu;

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k) \text{ là số trung bình}$$

**Độ lệch chuẩn:**

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu S ,

Độ lệch chuẩn là căn bậc hai số học của phương sai:

$$\text{Độ lệch chuẩn} = \sqrt{S^2}$$

**Chú ý**

- » Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2 = \frac{1}{n} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_k c_k^2) - \bar{x}^2$$

- » Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left[n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2 \right].$$

**Ý nghĩa**

- » **Phương sai** của MSL ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai của MSL gốc.
- » **Độ lệch chuẩn** của MSL ghép nhóm cũng là giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của MSL gốc.
→ Được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.
- » Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- » Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

B. Bài tập

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Khảo sát thời gian tự học bài ở nhà của học sinh khối 9 ở trường X, ta thu được bảng sau:

Thời gian(phút)	$[0;30)$	$[30;60)$	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$
Số học sinh	9	10	9	15	7

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 1603. B. 1601,9. C. 1602. D. 1601,64.

Câu 2: Giá trị cực đại của hàm số $y = -x^3 + 3x$ là

- A. -2. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 3: Dữ liệu về tốc độ của 100 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường cao tốc vào giờ cao điểm, được trích xuất từ camera của cơ quan cảnh sát giao thông. Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (bảng số liệu hình bên dưới).

Tốc độ (km/h)	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$	$[90;100)$	$[100;110)$
Số xe	10	20	20	35	15

- A. 50 km/h. B. 10 km/h. C. 110 km/h. D. 30 km/h.

Câu 4: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+3}{x-2}$ là:

- A. $y = 4$. B. $y = 2$. C. $x = 4$. D. $x = 2$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

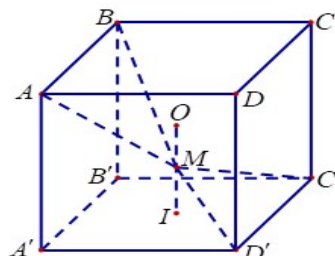
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;0)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(0;1)$. D. $(-1;1)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tìm tọa độ điểm B biết A đối xứng với B qua M .

- A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. B. $B(5;-3;-7)$. C. $B(5;3;-7)$. D. $B(-4;9;8)$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $OM = \frac{1}{2}MI$.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

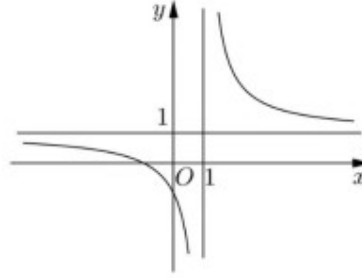
A. $\overline{OM} = \overline{MI}$.

B. $\overline{MI} = 2\overline{MO}$.

C. $3\overline{IM} = \overline{OI}$.

D. $\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{IM}$.

Câu 8: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

C. $y = x^3 - 3x - 1$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 9: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 15$). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất?

A. $x = 15$.

B. $x = 10$.

C. $x = 7$.

D. $x = 8$.

Câu 10: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+4x+1}{x-2}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$. Tính $a + b$.

A. 12.

B. 4.

C. 7.

D. 13.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$. Điểm nào sau đây đối xứng với điểm A qua trục Oy ?

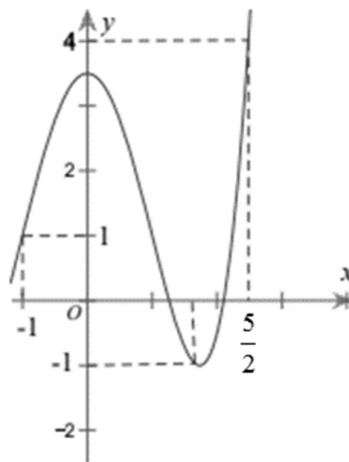
A. $A(-2;-3;1)$.

B. $A(2;-3;1)$.

C. $A(-2;3;1)$.

D. $A(2;3;-1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

A. $M = 4, m = 1$.

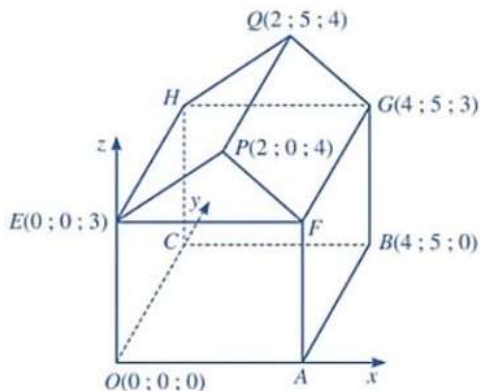
B. $M = \frac{7}{2}, m = -1$.

C. $M = \frac{7}{2}, m = 1$.

D. $M = 4, m = -1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật



- Diện tích sàn của ngôi nhà là $12(m^2)$.
- Toạ độ điểm $H(0;5;3)$.
- Hình chiếu vuông góc K của điểm Q xuống nền nhà có toạ độ $K(2;5;0)$.
- Thể tích phần không gian của ngôi nhà bằng $60(m^3)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 7}{x + 1}$ có đồ thị (C) .

- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.
- Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.
- Tâm đối xứng của đồ thị (C) có toạ độ là $(-1;1)$.
- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 3: Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)
Số ngày	5	10	9	4	2

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 145.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 250 (km).
- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm gần bằng 55,68.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần bằng 79,17.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		+ 0 -	
y	2 ↗ 4		3 ↘ -1	

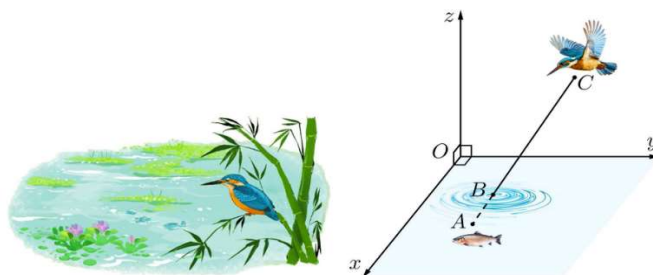
- Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng 2.

- b) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm.
 c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ là $f(1)$.
 d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

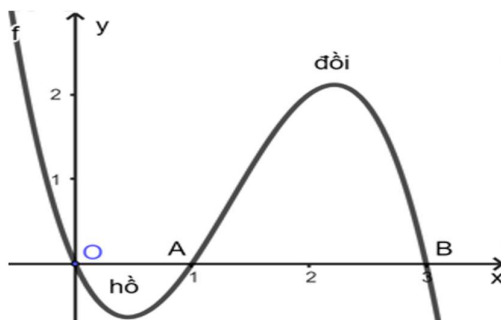
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (1; 0; m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 60° . Số phần tử của S là bao nhiêu?

Câu 2: Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước 2,5m, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là 5m và 3m phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước 90cm và cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là 4m và 3,5m. Biết tọa độ điểm $B(x; y; z)$ là lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước. Tính tổng $x + y + z$ (kết quả lấy tròn đến hàng phần trăm).



Câu 3: Lát cắt ngang một vùng đất được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km). Biết độ rộng của hồ $OA = 1$ km, khoảng cách giữa hai bên chân đồi $AB = 2$ km, độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất là 160m. Tìm chiều cao của ngọn đồi (tính bằng mét, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 4: Gọi M, m lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Tính giá trị của biểu thức $M^2 + 2m$.

Phần IV. Tự luận

Câu 1: Khảo sát thời gian tự học trong một tuần của một số học sinh lớp 12, ta được bảng sau:

Thời gian (giờ)	[12,5;14,5)	[14,5;16,5)	[16,5;18,5)	[18,5;20,5)	[20,5;22,5)
Số học sinh	9	13	17	9	4

Tìm phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)
Lời giải

Bảng số liệu

Thời gian (giờ)	[12,5;14,5)	[14,5;16,5)	[16,5;18,5)	[18,5;20,5)	[20,5;22,5)
Phần tử đại diện	13,5	15,5	17,5	19,5	21,5
Số học sinh	9	13	17	9	4

Giá trị trung bình của mẫu số liệu là:

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 13,5 + 13 \cdot 15,5 + 17 \cdot 17,5 + 9 \cdot 19,5 + 4 \cdot 21,5}{52} \approx 16,96.$$

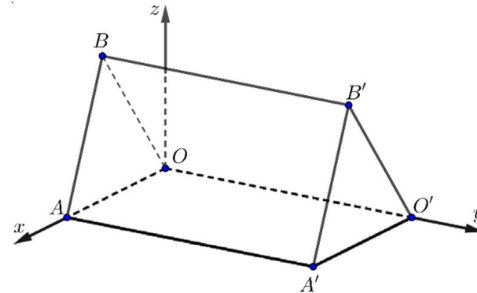
Phương sai của mẫu số liệu là:

$$\sigma^2 = \frac{1}{52} \left[9(16,96 - 13,5)^2 + 13(16,96 - 15,5)^2 + 17(16,96 - 17,5)^2 + 9(16,96 - 19,5)^2 + 4(16,96 - 21,5)^2 \right] \approx 5,4.$$

Câu 2: Những căn nhà gỗ trong *Hình 1* được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong *Hình 2*. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như *Hình 2* (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a + b + c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Hình 1



Hình 2

----- HẾT -----